Использование гистограмм для отображения характера распределения случайной величины

Пусть имеется генератор случайных чисел в диапазоне от *a* до *b*. Для простоты пусть это будет генератор равномерно распределенных числовых значений. Такое распределение можно получить, например, следующей языковой конструкцией VFP:

x = a + (b-a)*rand().

Гистограмма представляет собой множество узких, одинаковой ширины и равноудаленных друг от друга, вертикальных прямоугольников. Количество прямоугольников гистограммы соответствует количеству отрезков, на которые разбивается отрезок (a,b), высота прямоугольников соответствует количеству случайных значений попавших в данный отрезок.

Алгоритм построения гистограммы:

```
A = левая граница
B = правая граница
N = кол-во разбиений
M = кол-во испытаний
Массив AN(N)
**  AN(i) элемент массива – соответствует количеству попаданий в i-ый элементарный
**  отрезок
H = (B-A)/N      && ширина элементарного отрезка

Цикл по L от 1 до N
AN(L)=0
КонецЦикла

Цикл по k от 1 до M     && цикл испытаний
X = ГенераторСлучайнойВеличины(a,b)
       Цикл по L от 1 до N
              LB = A + (L-1)*H    && левая граница элементарного отрезка
              RB = LB + H
              Если  x>=LB и x< RB тогда
                     AN(L) = AN(L) + 1
                     Выход из цикла
              КонецЕсли
       КонецЦикла
КонецЦикла

Цикл по L от 1 до N
      ОтрисовкаСтолбца(L, AN(L))
КонецЦикла
```

```
Функция ГенераторСлучайнойВеличины
Параметры a,b
Возврат a + (b-a)*rand()
*  Здесь rand() – системная функция возвращающая
*   равномерно-распределенное случайное число от 0 до 1.
КонецФункции

Функция ОтрисовкаСтолбца
Параметры NS, HS
**  NS – номер столбца
**  HS – высота столбца
** ЛевоеПоле = значение левого поля в точках
** ШиринаСтолбца = Значение ширины столбца в точках
** Зазор = Значение зазора между столбцами в точках
x1= ЛевоеПоле + (ШиринаСтолбца + Зазор) * (NS-1)
**  вычисляем левую границу столбца NS
x2 = x1 + ШиринаСтолбца
   Отрисовка столбца номер NS и высоты HS
КонецФункции
```

Приведенный алгоритм построения гистограммы можно оптимизировать. Вместо цикла:

```
X = ГенераторСлучайнойВеличины(a,b)
      Цикл по L от 1 до N
            LB = A + (L-1)*H    && левая граница элементарного отрезка
            RB = LB + H
            Если  x>=LB и x< RB тогда
                  AN(L) = AN(L) + 1
                  Выход из цикла
            КонецЕсли
      КонецЦикла
```

в котором определяется номер диапазона можно использовать более простой способ: L = ОкруглитьВверх((x-A)/h)

Для построения гистограммы из N столбцов по результатам M испытаний генератора случайных чисел в диапазоне от A до B можно использовать следующий фрагмент программы на VFP:

```
h=(B-A)/N
For k = 1 to M     && цикл ипытаний
X = ГенераторСлучайнойВеличины()
L=ceiling((x-a)/h)
IF L>=1 AND L<=N
      AN(L)=AN(L)+1
ELSE
```

```
        IF L=0
                AN(1)=AN(1)+1
        ELSE
                ? x,L
        ENDIF
ENDIF
EndFor
```

Генератор дискретно-распределенных значений:

Построим генератор дискретных случайных величин с заданными вероятностями на основе системного генератора равномерно-распределенной величины от 0 до 1: Пусть величина x_i может принимать N-значений с вероятностями p_i:

X_i	P_i
1	0.1
2	0.2
3	0.3
4	0.1
5	0.2
6	0.1

Алгоритм основывается на свойстве равномерного распределения равномерно заполнять отрезок от 0 до 1, причем вероятность попадания случайного значения в подинтервал отрезка (0,1) шириной D равна ширине этого подинтервала. Например, если отрезок (0,1) разбить на два подинтервала (0,0.2) и (0.2, 1), то вероятность попадания в подинтервал (0? 0.2) будет равна 0.2, а вероятность попадания в отрезок (0.2, 1) будет равна 0.8. Таким образом, для вышеприведенной таблицы необходимо разбить отрезок (0,1) на 6 подинтервалов.

X_i	P_i	W_i Ширина	LB_i Левая граница	RB_i Правая граница
1	0.1	0.1	0	0.1
2	0.2	0.2	0.1	0.3
3	0.3	0.3	0.3	0.6
4	0.1	0.1	0.6	0.7
5	0.2	0.2	0.7	0.9
6	0.1	0.1	0.9	1

LB(1)=0, RB(1) = LB(1) + P(1)

Остальные элементы массивов левых и правых границ можно вычислить в цикле

```
Цикл по I от 2 до N
    LB(i) = LB(i-1) + W(i-1)
    RB(i) = LB(i) + P(i)
КонецЦикла
```

Первый вариант алгоритма

```
Функция ГенераторДискретныхЗначений
N=6
Массив P(N), LB(N), RB(N),W(N)

СчитываемМассив(@P,N)

LB(1)=0
RB(1) = LB(1) + P(1)
Цикл по I от 2 до N
    LB(i) = LB(i-1) + W(i-1)
    RB(i) = LB(i) + P(i)
КонецЦикла


XR = rand()
LB = 0
       Если  XR>=LB(1) и XR<RB(1)
                     Возврат X(1)
       ИначеЕсли XR >=LB(2) и XR <RB(2)
                     Возврат X(2)
       ИначеЕсли XR >=LB(3) и XR <RB(3)
                     Возврат X(3)
       ИначеЕсли XR >=LB(4) и XR <RB(4)
                     Возврат X(4)
       ИначеЕсли XR >=LB(5) и XR <RB(5)
                     Возврат X(5)
       ИначеЕсли XR >=LB(6) и XR <=RB(6)
                     Возврат X(6)
       КонецЕсли

КонецФункции

Функция ГенераторДискретныхЗначений
N=6
Массив P(N), X(N)
XR = rand()
LB = 0
Цикл по i=1 до N
       Если  xr>=LB и xr<LB+P(i)
                     Возврат X(i)
       КонецЕсли
       LB = LB + P(i)
КонецЕсли
Возврат 0
КонецФункции
```

Генерация дискретных распределений с заданным характером распределения вероятностей

Рассмотрим ситуацию, когда известны не вероятности событий X_i, а количества их реализации или другие величины пропорциональные вероятностям P_i.

Пусть необходимо построить генератор дискретных величин X(1), X(2), … X(N), N=10, вероятности реализации которых, пропорциональны величинам PR(1), PR(2), … PR(N).

Для реализации такого алгоритма необходимо найти вероятности P(i) реализации i-ой величины X(i). Затем, на основе массива P(i) рассчитать левые LB(i), правые RB(i) границы i-ых подинтервалов на отрезке (0,1). Можно не вычислять массив RB(i), поскольку RB(i) = LB(i) +P(i)

X(i)	PR(i)	P(i)	LB(i)	RB(i)
1	10		0	
2	32			
3	120			
4	220			
5	100			
6	56			
7	45			
8	30			
9	70			
10	120			

Найдем массив вероятностей P(i). Найдем сумму всех PR(i):

$$S = \sum_{i=1}^{N} PR(i)$$

Тогда массив вероятностей P(i) = PR(i)/S.

Левая граница первого отрезка должна быть равна нулю: LB(1) =0, соответственно правую границу первого отрезка находим как:

RB(1)= LB(1)+P(1)

Остальные элементы массивов LB(i) и RB(i) можно определить в цикле:

```
Цикл по i=2 до N
   LB(i) =LB(i-1)
   RB(i) = LB(i)+P(i)
Конец Цикла



Xr = rnd

Цикл по i=1 до N
     Если xr>= LB(i) и xr < RB(i) тогда
```

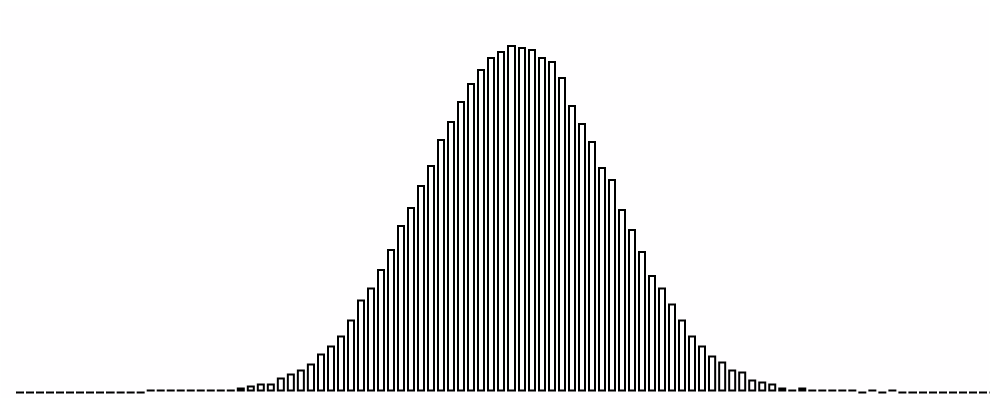
```
        Возврат X(i)
      Конец Если
   Конец Цикла
```

Генерация непрерывных распределений вещественных величин

Псевдо нормальное распределение

Рассмотрим очень простой метод генерации колоколообразного распределения вещественной величины. Этот метод основан на следующем факте: если сложить результаты N независимых экспериментов возвращающих равномерно распределенные случайные величины от о до 1, тогда вероятность получения близких к нулю величин и близких к N будет низка, а вероятность получения значений близких к N/2 – велика. Само распределение будет иметь вид колокола и если N устремить к бесконечности, тогда получится так называемое «Нормальное» распределение.

```
Функция ГенераторПсевдоНормальногоРаспределения
n=10
x=0
Цикл по I от 1 до n
    x=x+RAND()
КонецЦикла
Возврат x/10
КонецФункции
```



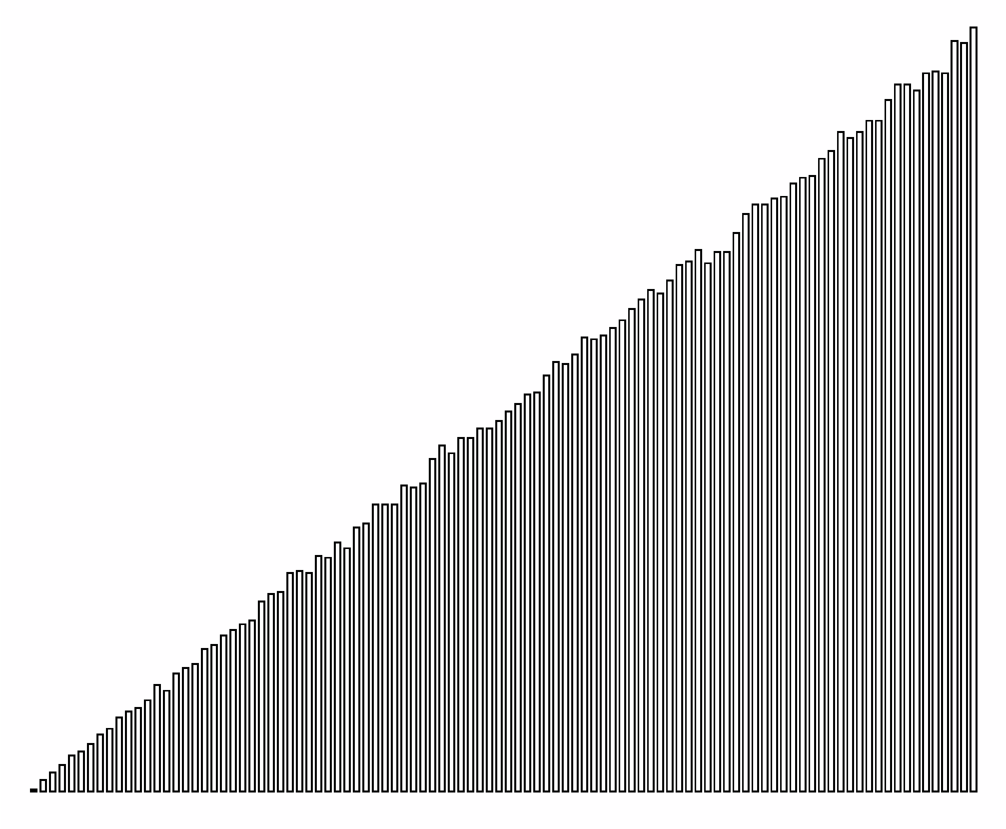
Вид гистограммы нормального распределения. Количество испытаний 100000, интервалов – 100.

Генерация линейно возрастающего распределения

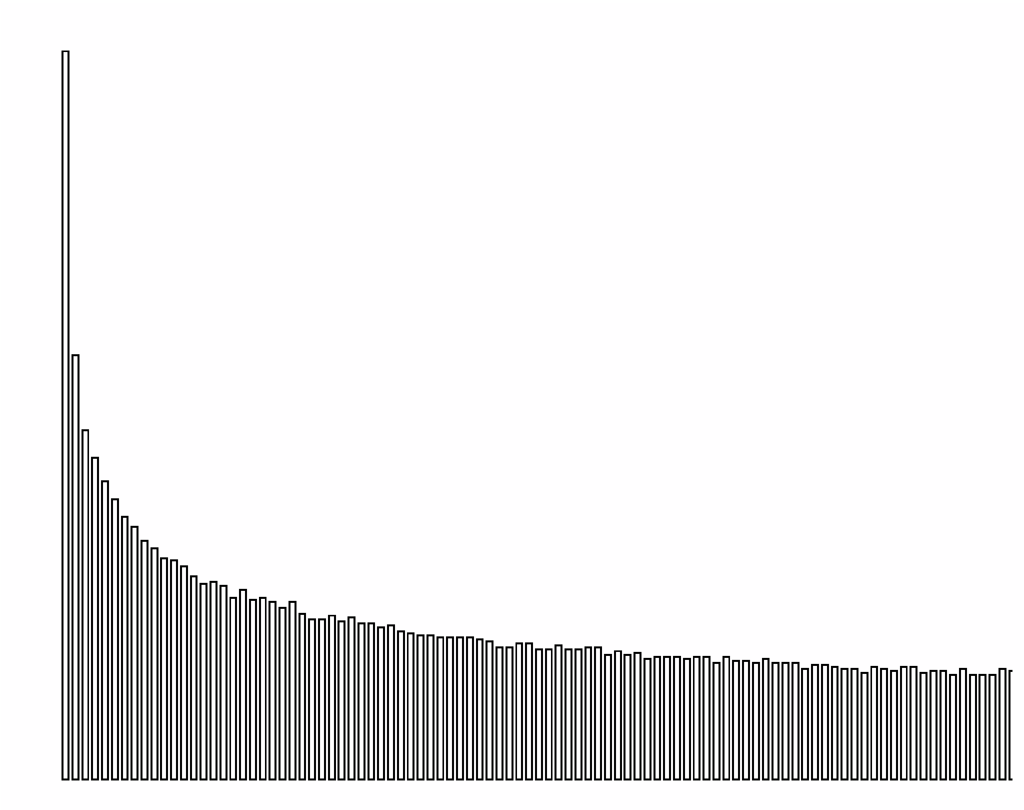
Распределение непрерывной вещественной величины с вероятностью линейно-возрастающей от 0 до 1 дает следующий, очень простой алгоритм

```
Функция ГенераторЛинейноВозрастающегоРаспределения
    x=RAND()
Возврат x^0.5
```

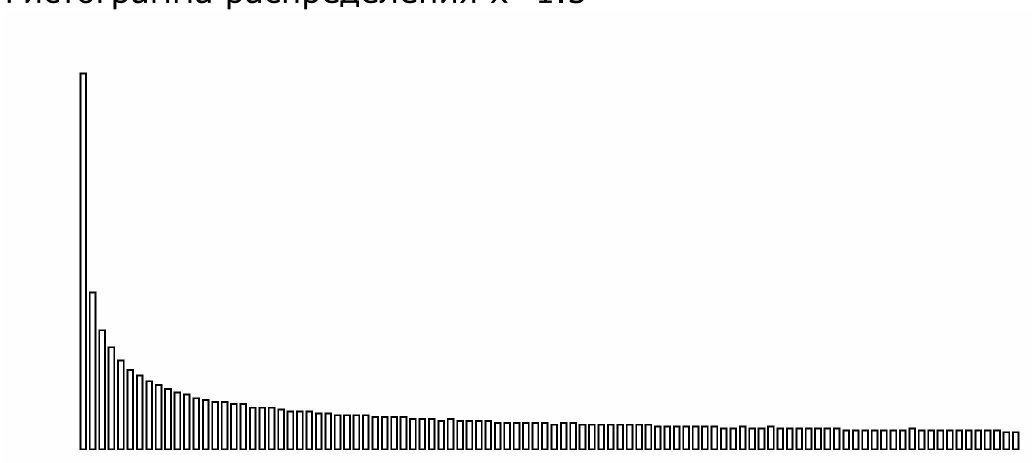
КонецФункции



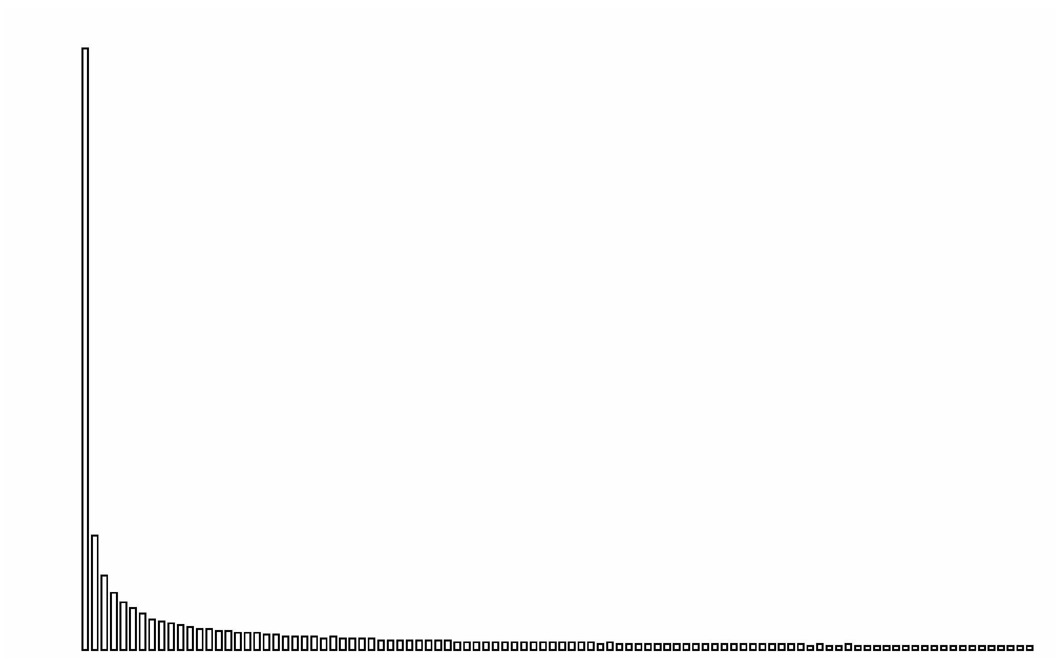
Гистограмма результатов 400000 испытаний линейно-возрастающего генератора непрерывных случайных величин от 0 до 1 (количество разбиений интервала (0,1) - 100)



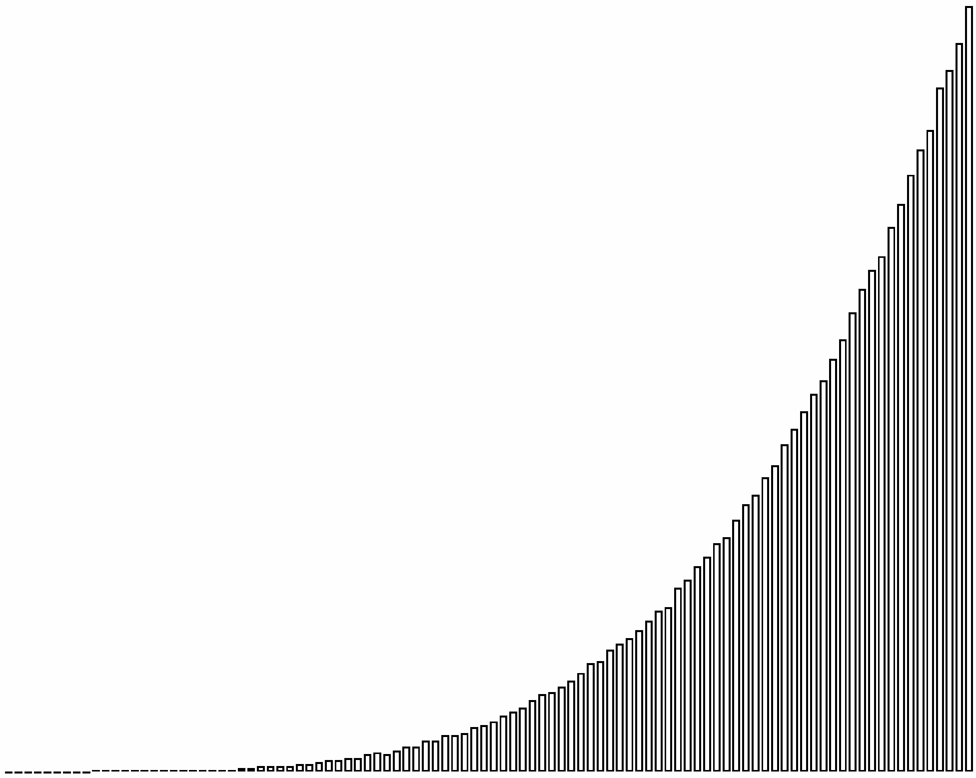
Гистограмма распределения x^1.5



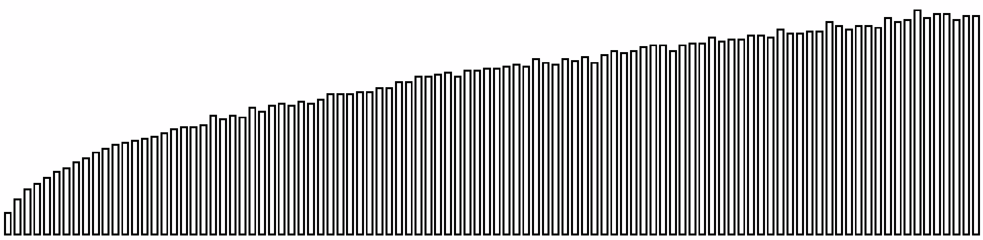
Гистограмма распределения x^2



Гистограмма распределения x^4

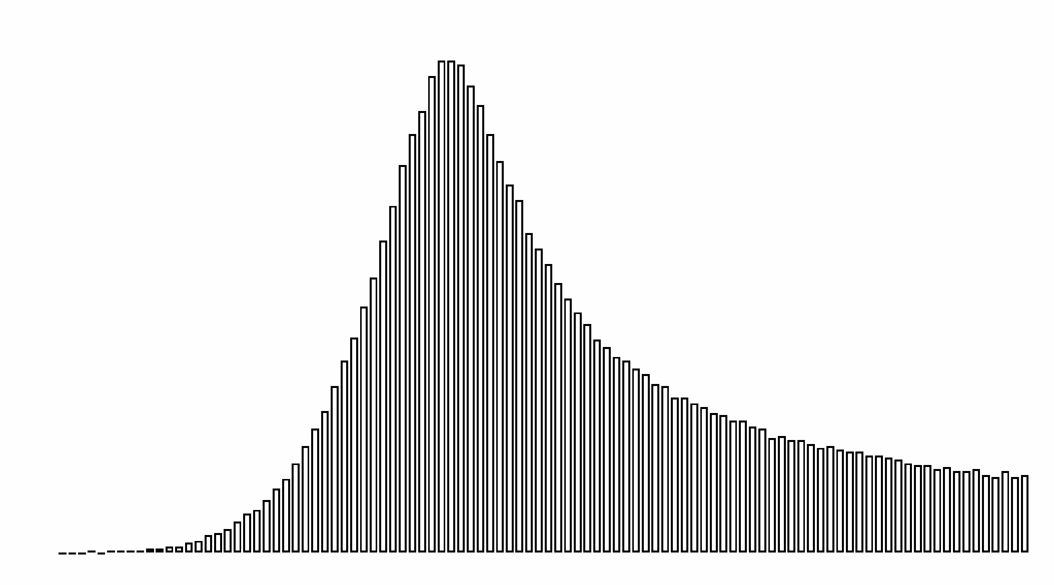


Гистограмма распределения x^0.2



Гистограмма распределения x^0.7

Комбинированные распределения



Гистограмма распределения (x^0.2 + x^4)/2